М 10
А.4

Всероссийская олимпиада школьников
Математика
Школьный этап
2018-2019 учебный год
Задания для 10 класса

1. Что больше: $2018^{2018} + 2016^{2016}$ или $2018^{2016} + 2016^{2018}$?

2. Первую треть пути автомобиль проехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть проехал со скоростью 45 км/ч, а третью - со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72, \\ (y+z)(x+y+z)=120, \\ (x+z)(x+y+z)=96. \end{cases}$$

4. В некоторой трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований трапеции, а угол между диагоналями равен 60°. Является ли трапеция равнобедренной?

5. Уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента b любой из этих корней, а коэффициент c удвоить, то полученное уравнение также будет иметь корень.

2. Пусть $3S$ - весь путь автомобилиста, тогда средняя скорость равна:

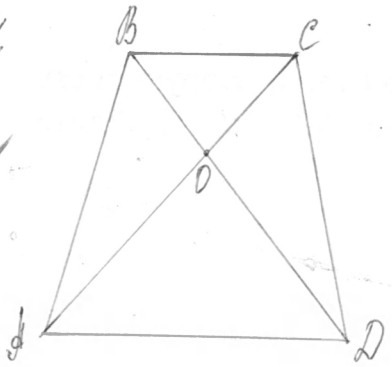
7б

$$\frac{3S}{\frac{S}{45}+\frac{S}{60}+\frac{S}{90}} = \frac{3}{\frac{1}{45}+\frac{1}{60}+\frac{1}{90}} = \frac{3}{\frac{4+3+2}{180}} = \frac{3}{\frac{9}{180}} = \frac{3}{\frac{1}{20}} = 60 \text{ (км/ч)}$$ - средняя скорость автомобилиста.

Ответ: 60 км/ч.

4.

7б



Дано: $ABCD$ - трапеция,
$AC = BC + AD$,
$\angle$ между AC и $BD = 60°$

Доказать: $ABCD$ - равнобедренный

Доказательство.

Проведём из B прямую к AC, так что $BC = CO$.

Получим 2 равнобедренных $\triangle BCO$ и $\triangle AOD$.

$\angle CBO = \angle COB$ (т.к. $\triangle BCO$ - равнобедр.)

$\angle AOD = \angle ADO$ (т.к. $\triangle BCO$ - равнобедр.)

$\angle BCO = \angle OAD$ (как накрест лежащие) $\Rightarrow \angle CBO = \angle COB = \angle ADO = \angle AOD$

Т.к. $\angle AOD = \angle BOC$, а сторона AO и CO лежат на одной прямой, то $\angle AOD$ и $\angle BOC$ - вертикальные.

O - точка пересечения диагоналей AC и BD, по условию $\angle BOC = \angle AOD = 60°$

$\angle CBO = \angle COB = \angle AOD = \angle ADO = 60°$

$\angle BCO = \angle OAD = 180° - \angle AOD - \angle ADO = 60°$.

$\triangle BCO$ и $\triangle AOD$ - равносторон.

$\angle BOA = \angle COD$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD$ (по 2 сторонам и углу между ними)

Значит, $BA = CD$, отсюда трапеция $ABCD$ - равнобедренная.

Ч.т.д.

10

1. $2018^{2018} + 2016^{2016} > 2018^{2016} + 2016^{2018}$

3. $\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72, \\ (y+z)(x+y+z) = 120, \\ (z+x)(x+y+z) = 96. \end{cases}$

$(x+y)(x+y+z) + (y+z)(x+y+z) + (z+x)(x+y+z) = 72 + 120 + 96$;

$(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x) = 288$;

$(x+y+z)(2x+2y+2z) = 288$;

$(x+y+z)\,2(x+y+z) = 288$;

$(x+y+z)^2 = 144$.

$x+y+z = \pm 12$

$x_1 = 12 - y - z$ $\qquad$ $x_2 = -12 - y - z$

1 $(12-y-z+y)(12-y-z+y+z) = 972$

$\cancel{+12y}$

$(y+z)\cdot 12 = 120$

2. $(-12-y-z+y)(-12-y-z+y+z) = 72$

$(y+z)\cdot(-12) = 120$

$(-y-z+z)12=96$

$(12-z)12=72$

$(y+z)12=120$

$(12-y)12=96$

$12-z=6$

$y+z=10$

$12-y=8$

$z_1=6$

$y_1=4$

$x_1=+2$

Ответ: $(2;4;6)$, $(-2;-4;-6)$

$(-12-y-z+z)\cdot(-12)=96$

$(-12-z)\cdot(-12)=72$

$(y+z)\cdot(-12)=120$

$(-12-y)\cdot(-12)=96$

$-12-z=6$

$y+z=-10$

$-12-y=-8$

$z_2=-6$

$y_2=-4$

$x_2=-2$

7б